05/04/2019

Παρατηρήσεις / Ασκήσεις

(1) $\exp(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, ακέραια και $(e^z)' = e^z$

(2) $\log z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι ολόμορφη ($\Rightarrow$ συνεχής) στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ και $(\log z)' = \frac{1}{z}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ολόμορφη} \Rightarrow \text{συνεχής} \\ (fg)' = f'g + g'f \\ (f\circ g)'(z) = f'(g(z))\cdot g'(z) \end{array}} \longrightarrow \text{STANARD ΕΡΓΑΛΕΙΑ (ΑΣΚΗΣΗ)}$$

(3) Η σύνθεση $\lambda$-δύναμης ($\lambda \in \mathbb{C}$), $f(z) = z^\lambda$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, αφού:

$$z^\lambda = e^{\lambda \log z} \Rightarrow (z^\lambda)' = (e^{\lambda\log z})' = e^{\lambda \log z}(\lambda \log z)' =$$
$$= z^\lambda \lambda (\log z)' = z^{\lambda-1}\lambda$$

(4) $a^z := e^{z\log a}$, $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, είναι ακέραια με

$$(a^z)' = (e^{z\log a})' = e^{z\log a}(z\log a)' = \underbrace{e^{z\log a}}_{=a^z}\log a$$

(5) $f(z) = |z|^2$ $(= |x+iy|^2 = x^2+y^2)$, $z \in \mathbb{C}$, είναι μιγαδικά διαφορίσιμη μόνο στο $z=0$

$[\,f(x+iy) = x^2+y^2 = u(x,y) + iv(x,y)$, $\quad u(x,y) = x^2+y^2$, $v(x,y) = 0$

όπου οι $u,v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\left(\Leftrightarrow \binom{u}{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\right)$ είναι ($\mathbb{R}$-) διαφορίσιμες

(μάλιστα είναι: $u,v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$)

αλλά: $u_x = 2x$, $u_y = 2y$

$v_x = 0$, $v_y = 0$

$\Rightarrow$ οι εξ. CR ισχύουν μόνο για $x=0$ και $y=0$

Αλλιώς: $]$

$\forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{z\bar z - z_0\bar z_0}{z-z_0} =$$

$$= \lim_{z\to z_0}\left(\bar z + z_0\frac{\bar z - \bar z_0}{z-z_0}\right) \nexists$$

(αν υπήρχε, θα υπήρχε το $\lim_{w\to 0} \frac{\bar{w}}{w}$)

Ενώ για $z_0=0$ : $\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2-|0|^2}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \bar{z} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}|z|^2 \Big|_{z=0} = 0$$

(6) Αντίστοιχα, η $f(z) = \bar{z}^n$, $z\in\mathbb{C}$, $n\geq 2$, είναι μιγ. διαφ. μόνο στο $z=0$, με: $\frac{d}{dz} f(z)\Big|_{z=0} = 0$

[Άσκηση]

(7) Εξετάστε $\mathbb{C}$-διαφ. για την: $g(x+iy) = \underbrace{x^2+y^2}_{=u(x,y)} + i\underbrace{2xy}_{=v(x,y)}$

Λύση:

$u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ [ως πολ. στα $x,y$] με:

$u_x = 2x$, $u_y = 2y$

$v_x = 2y$, $v_y = 2x$

Συνεπώς οι εξ. CR ισχύουν

αν και μόνο αν $v_x = -u_y \Leftrightarrow y = -y \Leftrightarrow y = 0$

$\Rightarrow$ Η $g: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι μιγαδικά διαφ. μόνο στα σημεία $z\in$ ($\Leftrightarrow \forall z\in\mathbb{C}$ : $\mathrm{Im} z = 0$)

[Όχι ολόμορφη, γιατί η έννοια αυτή χρησιμοποιείται μόνο για ανοιχτά σύνολα ολομετρίας]

Παρατήρηση: Αν $f: \mathbb{C}\to\mathbb{R}$, μιγ. διαφ. στο $z_0\in\mathbb{R}$, τότε:

$f|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ πραγμ. διαφ. στο $z_0\in\mathbb{R}$

[η μιγ. διαφ. επεκτείνει την πραγμ. διαφ.]

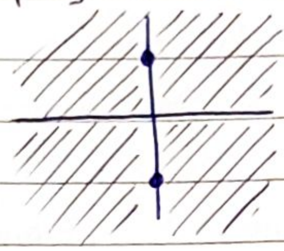
(8) Η συνάρτηση της απόλυτης τιμής $f(z) = |z|$, $z\in\mathbb{C}$ αντιστοιχεί στο δ.π. : $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$, με:

$$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

(στο $(0,0)$ $\binom{u}{v}$ δεν είναι $\mathbb{R}$-διαφ. $\Rightarrow$ δεν είναι $\mathbb{C}$-διαφ.

$\Rightarrow$ Δεν ισχύουν οι CR για κανένα $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
[αλλά : $\binom{u}{v}\in C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\mathbb{R}^2)$] $\Rightarrow$ δεν είναι πουθενά $\mathbb{C}$-διαφ.

(9) Η συνάρτηση του κ. ορίσματος $\mathrm{Arg}:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to(-\pi,\pi]$ είναι συνεχής μόνο στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ αλλά σε κανένα $z_0\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ δεν είναι μιγ. διαφ.



[Άσκηση]

## Οι τελεστές $\partial,\bar{\partial}$ :

Είδαμε ότι (έστω) $\underbrace{f}_{u+iv}: D\to\mathbb{C}$, $z_0\in D\subset\mathbb{C}$, ανοιχτό και είναι

$\mathbb{C}$-διαφ. $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}$-διαφ. και $\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$ στο $z_0$

$\rightarrow \exists\, \lambda,\mu\in\mathbb{C}: f(z) = f(z_0)+\lambda(z-z_0)+\mu(\bar{z}-\bar{z}_0)+o(|z-z_0|)$, για $z\to z_0$

$$\left[\Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)-\mu(\bar{z}-\bar{z}_0)}{|z-z_0|}\right| = 0\right]$$

και $df_{z_0} = \underbrace{\lambda}_{=\lambda_1+i\lambda_2} z + \underbrace{\mu}_{=\mu_1+i\mu_2}\bar{z}$ είναι το ($\mathbb{R}$-γραμμικός) $\mathbb{R}$-διαφ. της $f$ στο $z_0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow df_{z_0}(z) &= (\lambda_1+i\lambda_2)(x+iy)+(\mu_1+i\mu_2)(x-iy) = \\
&= \lambda_1 x-\lambda_2 y+i(\lambda_2 x+\lambda_1 y)+\mu_1 x+\mu_2 y+i(\mu_2 x-\mu_1 y) \\
&= (\lambda_1+i\lambda_2)x+(-\lambda_2+i\lambda_1)y+(\mu_1+i\mu_2)x+(\mu_2-i\mu_1)y \\
&= (\lambda_1+\mu_1+i(\lambda_2-\mu_2))x+(-\lambda_2+\mu_2+i(\lambda_1-\mu_1))y \\
&\overset{*}{=} u_x(x_0,y_0)x+u_y(x_0,y_0)y+i(v_x(x_0,y_0)x+v_y(x_0,y_0)y) = \\
&= f_x(z_0)x+f_y(z_0)y
\end{aligned}$$

$\left\{\begin{array}{l} f = u+iv \\ f_x = u_x+iv_x \end{array}\right\}$

$$* \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 & -\lambda_2+\mu_2 \\ \lambda_2+\mu_2 & \lambda_1-\mu_1 \end{pmatrix}$$

Άρα: $df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu \bar{z} = f_x(z_0)x + f_y(z_0)y =$

$$= \underbrace{\frac{f_x(z_0) - i f_y(z_0)}{2}}_{\substack{=\lambda \\ =: \frac{\partial}{\partial z} f(z_0) \\ =: \partial f(z_0)}} \underbrace{(x+iy)}_{=z} + \underbrace{\frac{f_x(z_0) + i f_y(z_0)}{2}}_{\substack{=\mu \\ =: \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z_0) \\ =: \bar{\partial} f(z_0)}} \underbrace{(x-iy)}_{=\bar{z}}$$

$$= \partial f(z_0) z + \bar{\partial} f(z_0) \bar{z}$$

και είδαμε:

$f$ : $\mathbb{C}$ - διαφ. στο $z_0 \Leftrightarrow \underbrace{f \ \mathbb{R}\text{-διαφ. στο } z_0}_{(\exists\, df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu \bar{z})}$

<u>Άρα</u>: Μια $\mathbb{R}$-διαφ. $f$ <u>και</u> $\mu > 0$ είναι $\mathbb{C}$-διαφ. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{\partial} f = 0$ και τότε: $\partial f = f'$

$[\bar{\partial} f = 0 \Leftrightarrow f_x + i f_y = 0 \Leftrightarrow f_x = -i f_y$, όπου $f' = f_x \Rightarrow$

$f' = u_x + i v_x$

$\Rightarrow \partial f = \frac{f_x - i f_y}{2} = f_x = f'\,]$

Άρα, εισάγοντας τους διαφ. τελεστές:

$$\bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\partial := \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

-Έχουμε την εξής <u>ισοδύναμη μορφή του $\partial CR$</u>:

Η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό είναι <u>ολόμορφη</u> $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Η $f$ είναι $\mathbb{R}$-διαφ. και $\boxed{\bar{\partial} f = 0}$.

Τότε: $\boxed{f' = \partial f}$

Μπορώ να το χρησιμοποιήσω ως ορισμό της ολόμορφης.

## Παρατήρηση / Άσκηση

Έστω $M = \{ f : D \to \mathbb{C} \ , \ \underbrace{f \text{ μερικώς διαφ.}} \}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό

$\iff \forall z \in D : \exists\, f_x, f_y : D \to \mathbb{C}$

$\iff \forall (x,y) \in D : \exists\, u_x, u_y, v_x, v_y : D \to \mathbb{R}$

Τότε οι διαφορικοί τελεστές: $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ που ξέρουμε πάνω στο $M$ είναι στον διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{C}$, $M$, $\mathbb{C}$- γραμμικοί τελεστές.

π.χ.

$$\bar{\partial}(af + bg) = a\bar{\partial}f + b\bar{\partial}g \quad , \quad \forall f, g \in N, \ \forall a, b \in \mathbb{C}$$

Επίσης ισχύουν (για $\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{=\partial_x}, \frac{\partial}{\partial y}, \bar{\partial}, \partial$) :

i. ο κανόνας του γινομένου, π.χ. $\bar{\partial}(fg) = (\bar{\partial}f)g + f(\bar{\partial}g)$

ii. ο κανόνας του πηλίκου, π.χ. $\bar{\partial}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\bar{\partial}f + f\bar{\partial}g}{g^2}$, $g \neq 0$

**Παρατήρηση:** $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$

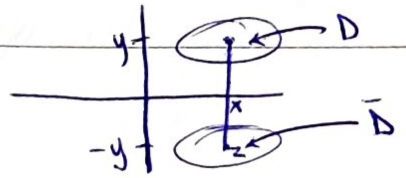
$$\iff \underbrace{\partial_x}_{=\frac{\partial}{\partial x}} = \bar{\partial} + \partial \quad \text{και} \quad i\underbrace{\partial_y}_{=\frac{\partial}{\partial y}} = \bar{\partial} - \partial$$

Η ισοδύναμη μορφή των CR οδηγεί και στον εξής ορισμό:

**Ορισμός:** Η $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, ονομάζεται αντιολόμορφη αν είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη και $\boxed{\partial f = 0}$. Τότε $\bar{\partial} f$ ονομάζεται παράγωγος της $f$ ως προς $\bar{z}$.

**Πρόταση:** Έστω $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, ανοικτό, και $\bar{f} := u - iv$ $(u, v : D \to \mathbb{R})$ και $\bar{D} = \{ \bar{z} : z \in D \}$

όχι κλειστή θήκη εδώ



Τότε: α. $f$ αντιολόμορφη $\iff \bar{f}$ ολόμορφη, και τότε
$$\partial f = \overline{(\bar{f})'} = \overline{(\partial \bar{f})}$$

β. $f$ αντιολόμορφη $\iff$ η $g(z) = f(\bar{z})$, $z \in \bar{D}$ είναι ολόμορφη και τότε $\underbrace{\bar{\partial} f(z)}_{= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f} = \underbrace{\partial g(\bar{z})}_{= \frac{\partial}{\partial z} g}$, $z \in D$

Το β δεν θα το κοιτάξουμε καθόλου, ίσως για λίγο το α.

Απόδειξη:

α. Έστω $f$ $\mathbb{R}$-διαφ. Αντιστοιχεί στο ($\mathbb{R}$-)διαφ. δ.π. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}$

Η $\bar{f}$ αντιστοιχεί στο δ.π. $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ [το οποίο είναι επίσης $\mathbb{R}$-διαφ. δ.π. : αυτό δεν εξαρτάται από τη δομή του $D\begin{pmatrix} u \\ \pm v \end{pmatrix}$ ]

με παραγ. $D\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -v_x & -v_y \end{pmatrix}$ και η $\bar{f}$ είναι ολόμορφη αν.ν

$\boxed{\text{Εξ. CR}}$ $\begin{cases} u_x = -v_y \\ v_x = u_y \end{cases} \iff \bar{f}_x = u_x - iv_x = -v_y - iu_y = -i(u_y - iv_y) = -i\bar{f}_y$

$$\iff \bar{f}_x + i\bar{f}_y = 0 \iff$$
$$\iff \boxed{\partial f =} \ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar{f} \ \boxed{=0}$$

$\iff f_x = u_x + iv_x = -v_y + iu_y = i\underbrace{(u_y + iv_y)}_{= f_y} \iff$ $f_x - if_y = 0$

$\iff \boxed{\partial f = 0}$

και άρα: $\bar{f}' = \bar{f}_x = -i\bar{f}_y \overset{①}{=} \partial \bar{f}$

και: $f_x = if_y = \bar{\partial} f$ ②

ή αλλιώς: $\overline{\bar{\partial} f} \overset{①②}{=} (\bar{f})' \overset{①}{=} \partial \bar{f} \iff \bar{\partial} f = \overline{(\bar{f}')}$ □

$\underset{\sim}{=}$ $\bar{z}$ (για το παράδειγμα 3 που ακολουθεί).

$$\boxed{\begin{array}{l} f : \text{αντιολόμ.} \iff \partial f = 0 \\ [\,f : \text{ολομ.} \iff \bar{\partial} f = 0\,] \end{array}}$$

$$\partial \bar{f} = \frac{1}{2}(\bar{f}_x - i\bar{f}_y)$$
$$\bar{\partial} f = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

# Παραδείγματα

[Υπενθύμιση: $f$ $\mathbb{R}$-διαφ. είναι → ολόμορφη $\Leftrightarrow \bar{\partial} f = 0$ και τότε $f' = \partial f$
→ αντιολόμορφη $\Leftrightarrow \partial f = 0$ και τότε $\bar{\partial} f$ παραγ. ως προς $\bar{z}$]

① $f(z) = c, \ c \in \mathbb{C}$, σταθερά, $z \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{\partial} c = 0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} c + i \frac{\partial}{\partial y} c\right]$$

και $\partial c = 0 \ \left[= (c)'\right]$

$\Rightarrow$ η σταθερή συνάρτηση και ολόμορφη και αντιολόμορφη

② $\forall n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $z \in \mathbb{C}$
και $\forall \ -n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:
$z^n$ ολόμορφη $\Leftrightarrow \bar{\partial}(z^n) = 0$ και $\partial(z^n) = n \cdot z^{n-1}$
$\Rightarrow$ οι $z^n$ αυτές, είναι ολόμορφες (στο πεδίο ορισμού τους) αλλά δεν είναι αντιολόμορφες σε κανένα ανοικτό υποσύνολο (του πεδ. ορισμού τους)

③ $f(z) = z$, $z \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ ολομ. $\Leftrightarrow \bar{\partial} z = 0 \Longleftrightarrow$ (Πρόταση)

$$\Leftrightarrow \overline{\bar{\partial} \bar{z}} = \overline{z'} = \overline{\partial z} = \bar{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \partial \bar{z} = 0$$

$\Leftrightarrow$ η $z \longmapsto \bar{z}$ αντιολόμορφη

Επίσης, προκύπτουν τα εξής:

$$\bar{\partial}(\bar{z}^n) = n\bar{z}^{n-1}, \quad \partial(\bar{z}^n) = 0$$

$\Rightarrow \forall \ n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ στο πεδίο ορισμού της $z \mapsto z^n \bar{z}^m$

κανόνας γινομένου

$$\bar{\partial}(z^n \bar{z}^m) = z^m(\bar{\partial} z^n) + z^n \bar{\partial}(\bar{z}^m) = m z^n \bar{z}^{m-1} \Rightarrow$$

$$\partial(z^n \bar{z}^m) = z^m(\partial z^n) + z^n \partial(\bar{z}^m) = n \bar{z}^m z^{n-1} \Rightarrow$$

($\Rightarrow$ όχι ολόμορφη, αν $\neq 0$)
($\Rightarrow$ όχι αντιολόμορφη, αν $\neq 0$)

[$n = 1$, $m = 1$ : $|z|^2 = z\bar{z}$ ούτε ολομ. ούτε αντιολ.]